Instituto de Matemática
Campus Curicó

Prueba N°2
Álgebra

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) **[20 ptos]** Sean x, y, z tres números en progresión aritmética tales que su suma es 24. Se pide

   a) determinar los números x, y, z que cumplen que si restamos 1 al primer número y 2 al segundo número, los nuevos números quedan en progresión geométrica.

   b) encontrar $\mathbf{S}_5 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$ donde a_k y b_k representan las progresiones aritméticas y geométricas con primer término x, con la condición que $d > 0$ (diferencia).

2) **[20 ptos]** En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$. Encuentre

   a) para $n = 12$, el coeficiente del término central.

   b) el término independiente de x, si se sabe que el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades.

3) **[20 ptos]** Sea el conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ definido recursivamente por

$$a_1 = \frac{3}{4} \quad ; \quad a_{i+1} = \frac{3}{4 - a_i}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   Demostrar que $a_n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Pauta :

1) *a*) Supongamos que los números en **P.A** son:

$$x-d, x, x+d$$

donde $(x-d)+x+(x+d)=24$, o sea $x=8$ y los números en **P.A** quedan:

$$8-d, 8, 8+d$$

Ahora imponiendo las condiciones $7-d, 6, 8+d$ están en **P.G**, de donde

$$\frac{6}{7-d}=\frac{8+d}{6} \iff d^2+d-20=0 \implies d=4 \vee d=-5$$

Los números originales en **P.A** son: $13, 8, 3$ cuando $d=-5$ o $4, 8, 12$ cuando $d=4$.

b) Note que $a_k=4+4(k-1)=4k$ y $b_k=3\cdot 2^{k-1}$. Luego

$$\mathbf{S}_5=\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}4k+\sum_{k=1}^{5}3\cdot 2^{k-1}=4\cdot\frac{5}{2}\cdot 6+3\cdot(2^5-1)=60+93=153$$

2) $\displaystyle\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{3/2})^{n-k}\cdot(x^{-4})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\frac{3}{2}n-\frac{11}{2}k}.$

a) Si $n=12$, el término central está dado por T_7, donde $k=6$.

$$T_7=\binom{12}{6}x^{\frac{3}{2}\cdot 12-\frac{11}{2}\cdot 6}=\binom{12}{6}x^{-15}$$

b) Note que, el coeficiente 3° término es $\binom{n}{2}$ y del 2° término es $\binom{n}{1}$. Luego

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+44 \iff \frac{n^2-n}{2}=n+44 \iff n^2-3n-88=0 \implies n=11 \vee n=-8$$

Como $n\in\mathbb{N}\implies n=11$. Luego

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{11}=\sum_{k=0}^{n}\binom{11}{k}x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}$$

El término independiente de x es $\binom{11}{k}$ donde k es tal que $\dfrac{33}{2}-\dfrac{11}{2}k=0\implies k=3$. Es decir: $\binom{11}{3}=165$.

3) Sea $P(n): a_n = \dfrac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$

- Para $n=1$, tenemos $a_1 = \dfrac{3^{1+1}-3}{3^{1+1}-1} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. Es decir $P(1)$ se cumple.
- Para $n=k$, supongamos que $P(k)$ se cumple para k y los valores menores que k, es decir

$$P(k): a_k = \frac{3^{k+1}-3}{3^{k+1}-1}\,, \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ (Hipótesis de inducción)}$$

- Para $n=k+1$, Probemos que se cumple $P(k+1)$, es decir

$$P(k+1): a_{k+1} = \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1}\,, \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ (Tesis de inducción)}$$

demostración: Basta con utilizar la forma de la sucesión, o sea:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} = \frac{3}{4-a_k} &= \frac{3}{4-\dfrac{3^{k+1}-3}{3^{k+1}-1}} \\
&= \frac{3}{\dfrac{4(3^{k+1}-1)-(3^{k+1}-3)}{3^{k+1}-1}} \\
&= \frac{3}{\dfrac{3\cdot 3^{k+1}-1}{3^{k+1}-1}} \\
&= \frac{3}{\dfrac{3^{k+2}-1}{3^{k+1}-1}} \\
&= \frac{3(3^{k+1}-1)}{3^{k+2}-1} \\
&= \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P(n): a_n = \dfrac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}$ se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$